



2007

# **Alcune considerazioni su rumore e non linearità nelle reti connesse in cascata**

Umberto Sclacca

*n.41*

**Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia**

Via di Vigna Murata 605 - 00143 Roma

tel 06518601 • fax 065041181

[www.ingv.it](http://www.ingv.it)



**Direttore**

Enzo Boschi

**Editorial Board**

Raffaele Azzaro (CT)

Sara Barsotti (PI)

Viviana Castelli (MI)

Anna Grazia Chiodetti (AC)

Rosa Anna Corsaro (CT)

Luigi Cucci (RM1)

Mauro Di Vito (NA)

Sergio Gurrieri (PA)

Lucia Margheriti (CNT)

Simona Masina (BO)

Nicola Pagliuca (RM1)

Leonardo Sagnotti (RM2)

Salvatore Stramondo (CNT)

Andrea Tertulliani - coordinatore (RM1)

Gianluca Valensise (RM1)

Gaetano Zonno (MI)

**Segreteria di Redazione**

Francesca Di Stefano - responsabile

Tel. +39 06 51860055

Fax +39 06 36915617

Sabrina Palone

Tel. +39 06 51860405

Fax +39 06 51860585

redazionecen@ingv.it

# **ALCUNE CONSIDERAZIONI SU RUMORE E NON LINEARITÀ NELLE RETI CONNESSE IN CASCATA**

Umberto SCIACCA

*Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia - Roma*



## Indice

Indice.....	3
1. Introduzione.....	5
2. Fattore e cifra di rumore .....	5
3. Temperatura di rumore .....	6
4. Resistenze e bande .....	6
5. Rumore di reti in cascata .....	7
6. Misura assoluta (metodo del guadagno) .....	7
7. Misura relativa (metodo del fattore Y) .....	8
8. Alcune verifiche sperimentali .....	9
9. Linearità nei ricevitori .....	9
10. Punto di intercetta del terz'ordine .....	10
11. Calcolo di IP3 di sistemi in cascata .....	11
12. Conclusioni.....	12
Bibliografia .....	13



## 1. Introduzione

La presente è una breve nota scritta allo scopo di richiamare i concetti principali relativi a due parametri caratterizzanti i ricevitori o, più in generale, sistemi che trattano segnali in transito: la cifra di rumore e il punto di intercetta del terz'ordine, con indicazioni sul modo di misurare il primo in laboratorio. Non vengono approfondite le varie cause del rumore (es. termico, "shot", ecc.) e la sua distribuzione spettrale (bianco, rosa). Le considerazioni che seguono si applicano a qualunque dispositivo e in linea di principio a qualunque tipo di rumore, sebbene di solito trovino naturale applicazione per il rumore termico "bianco", vale a dire costante in potenza a tutte le frequenze.

Un discorso a parte invece andrebbe fatto per tutte quelle sorgenti di disturbo che sono concentrate in banda. Tali disturbi sono causati da interferenze o diafonie dovute a sorgenti fisiche che emettono energia non voluta. Può succedere che altri disturbi siano originati all'interno del dispositivo per effetti indesiderati (es. interferenze immagine, spurie per effetti non lineari). Tali disturbi non rientrano propriamente nella definizione di rumore, perché sono concentrate a particolari frequenze, mentre per rumore si intende qualcosa che occupa una banda estesa. Inoltre, da un punto di vista statistico, il rumore è incoerente, mentre le interferenze e le spurie sono segnali certi, perciò la valutazione del loro effetto va fatta con metodi diversi, che non sono trattati in questa sede.

Il punto di intercetta del terz'ordine è usato per caratterizzare la linearità del ricevitore; anche per esso valgono alcune regole per il calcolo del parametro in caso di reti in cascata, difficilmente reperibili in letteratura.

## 2. Fattore e cifra di rumore

Il parametro usato per caratterizzare sistemi da punto di vista del rumore è il cosiddetto fattore di rumore, indicato con  $F$ , o la sua espressione in decibel, detta cifra di rumore, NF (spesso tradotta in modo improprio come "figura di rumore", dato che in inglese si chiama *noise figure*). Vale quindi:

$$NF = 10 \log(F). \quad (1)$$

Il fattore di rumore è un parametro globale, nel senso che non tiene conto delle cause effettive del rumore generato all'interno di un dispositivo (d'ora in poi chiamato DUT, *device under test*), ma solo di quanto si degrada il rapporto segnale - rumore, quando il segnale ed il rumore presenti al suo ingresso appaiono all'uscita (vedi fig.1).



Fig.1 - Definizione di Fattore di Rumore

In fig.1 le "S" indicano segnali, le "N" rumori, intendendo con esse le loro potenze. Il fattore di rumore è definito come:

$$F = \frac{S_i / N_i}{S_o / N_o}, \quad (2)$$

Ora, anche qualora il DUT amplifichi il segnale, accade sempre che il rapporto segnale - rumore sia migliore in ingresso che in uscita. Ciò a causa del rumore che viene introdotto dal DUT al suo interno. Ciò può esprimersi scrivendo che:

$$S_o = G \cdot S_i, \quad (3)$$

$$N_o = G \cdot (N_i + N_{eq}), \quad (4)$$

ove si è indicato con  $G$  il guadagno del DUT (minore di uno se attenua) e con  $N_{eq}$  il contributo di rumore generato all'interno del ricevitore. Per come è stata posta la (4)  $N_{eq}$  rappresenta un rumore che dovrebbe essere aggiunto a quello già presente all'ingresso per dare lo stesso rumore all'uscita di un DUT ideale, cioè che non introduce rumore (fig.2).

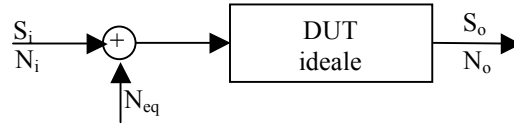


Fig.2 - Rumore equivalente riportato all'ingresso

Dopo qualche semplice passaggio si arriva alla nuova espressione:

$$F = \frac{N_i + N_{eq}}{N_i} = \frac{\text{rumorevero}}{\text{rumoreideale}} \quad (5)$$

### 3. Temperatura di rumore

Spesso si fa uso del concetto temperatura di rumore, basato sul fatto che la densità spettrale di potenza del rumore termico è nota e data da (l'unità di misura è il Joule, spesso si usa però W/Hz):

$$n = k T, \quad (6)$$

ove  $k$  è la costante di Boltzmann ( $1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K) e  $T$  la temperatura assoluta di un resistore di valore unitario che genera il rumore  $n$ . Essendo il rumore bianco, la potenza totale è semplicemente  $n$  per la banda  $B$  su cui si opera (il DUT non ha una banda infinita):

$$N = k T B \text{ (W)}. \quad (7)$$

Quindi, ad esempio, il rumore equivalente prima definito, può essere espresso come:

$$N_{eq} = k T_{eq} B, \quad (8)$$

in cui  $T_{eq}$  è chiamata "temperatura di rumore" del dispositivo. In molti casi anziché ragionare sui rumori si preferisce fare i conti sulle temperature. Di solito si introduce una temperatura di riferimento di 290 K (+17°C); in queste condizioni il rumore per banda unitaria è univocamente determinato:  $4 \cdot 10^{-21}$  W/Hz; se si preferisce usare unità logaritmiche, si ha: -174 dBm / Hz. Questo approccio è molto semplice, ma, in caso non si lavori alla temperatura standard, bisogna ricordarsi di rideterminare il valore.

Usando le temperature di rumore il fattore di rumore può essere espresso in maniera alternativa; dalle (5) e (7), con gli opportuni pedici e ipotizzando che il tutto si trovi a  $T_0$ :

$$F = \frac{T_0 + T_{eq}}{T_0}. \quad (9)$$

### 4. Resistenze e bande

Per finire questi brevi richiami, ecco alcune considerazioni sulle assunzioni poste nel discorso appena fatto. Fino ad ora si è immaginato che la resistenza che genera il rumore sia di 1  $\Omega$ , cosa ovviamente non vera in pratica. Il fatto che non si tenga conto del valore della resistenza effettiva è dovuto alla ipotesi di lavoro in condizioni di adattamento. In tali condizioni si può dimostrare che, pur variando il valore rms della tensione di rumore generata, la potenza effettivamente trasferita al DUT è indipendente dal valore della resistenza, e dipende solo dalla temperatura.

Un'altra assunzione implicitamente posta in tutte le formule introdotte in precedenza è che il passaggio tra densità  $n$  e rumore totale  $N$  sia possibile con la semplice moltiplicazione per la banda  $B$ :

$$N = n B; \quad (10)$$

questa è valida perché si sta considerando solo il rumore termico, che è "bianco", cioè uguale a tutte le frequenze. Ovviamente, se ciò non fosse, il discorso si complicherebbe, ma ciò non è nello scopo della presente nota. Tuttavia vi è anche un'altra fonte di differenziazione in frequenza: il guadagno  $G$ , che in generale non è uguale a tutte le frequenze di uso del DUT. Ciò significa che, andando ad osservare l'andamento spettrale del rumore all'uscita del DUT, esso non appare affatto bianco, ma ricalca l'andamento della risposta in frequenza del dispositivo. In realtà ciò non ha conseguenze sul calcolo del fattore di rumore; per capire ciò basta guardare la (5), in cui non compare il guadagno, ma solo rumori riportati all'ingresso; per avere quelli all'uscita bisognerebbe moltiplicare numeratore e denominatore per  $G$ , ma l'effetto si annullerebbe.



Ciò non vuol dire che sia inutile conoscere il valore del guadagno del DUT, come sarà meglio chiarito discutendo dei metodi di misura.

## 5. Rumore di reti in cascata

Lavorare col fattore di rumore è molto utile al momento in cui si connettono più dispositivi in cascata, cosa usuale in un sistema di telecomunicazione. Infatti esiste una semplice relazione che consente di calcolare il fattore di rumore complessivo conoscendo quelli dei componenti e i loro guadagni. Se chiamiamo  $G_1, G_2$ , ecc. i guadagni dei vari dispositivi della catena (il pedice 1 si riferisce al primo, quello in cui si introduce il segnale di ingresso) e  $F_1, F_2$ , ecc. i corrispondenti fattori di rumore, si ha:

$$F_{tot} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \frac{F_4 - 1}{G_1 G_2 G_3} + \dots \quad (11)$$

In pratica si sommano i fattori di rumore diminuiti di uno, però mano a mano che si avanza nella catena essi vanno divisi per il guadagno complessivo degli stadi precedenti (se si vuole calcolare il rumore complessivo di un sistema comprensivo di un'antenna ricevente, il fattore di rumore dell'antenna va inserito nella somma prima di  $F_1$ ). Questo vuol dire che, se i vari stadi portano ad un costante aumento del segnale, il contributo al rumore totale degli stadi successivi diviene via via sempre minore. Se il primo stadio ha un guadagno abbastanza buono, può essere che il rumore complessivo corrisponda quasi a quello del primo stadio, ragione per cui esso è in genere un amplificatore a basso rumore. Ovviamente se sono presenti elementi attenuanti il discorso cambia e, se le attenuazioni sono importanti, può avvenire che tornino ad essere significativi i contributi anche di stadi successivi al primo, quelli in cui, per effetto del guadagno complessivo, il segnale non è tanto forte.

Quanto detto è sufficiente come richiamo della teoria. Nel seguito si daranno alcuni cenni sui metodi di misura della cifra di rumore di un dispositivo.

## 6. Misura assoluta (metodo del guadagno)

In linea di principio è possibile determinare il fattore di rumore di un DUT applicando direttamente le definizioni sopra introdotte. Ad esempio, se nella (5) si moltiplica numeratore e denominatore per  $G$ , si ha:

$$F = \frac{N_o}{kT_0 B G} = \frac{n_o}{kT_0 G}, \quad (12)$$

in cui si è preferito eliminare il termine  $B$  in quanto, da un lato esso è di difficile determinazione (esiste anche una definizione di una "banda di rumore" di un dispositivo), dall'altro " $N$ " è praticamente impossibile da misurare con un analizzatore di spettro, in quanto si dovrebbe calcolare la potenza totale su una banda estesa; più facile è misurare una densità (gli analizzatori di solito lo fanno) ad una particolare frequenza compresa all'interno della banda utile, in cui il guadagno sia proprio  $G$ . Come annunciato prima, si vede che la conoscenza del valore del guadagno è importante; ciò che non ha effetto è la sua variazione: se in una certa banda il guadagno varia, cambia anche  $n_o$  alle stesse frequenze e  $F$  rimane inalterato; però è meglio lavorare dove il guadagno assume valori maggiori, al centro della banda utile.

In pratica si deve approntare un semplice banco di misura come in fig.3, rilevare  $n_o$  e calcolare  $F$  (o  $NF$ ) conoscendo  $G$  e  $kT_0$ .

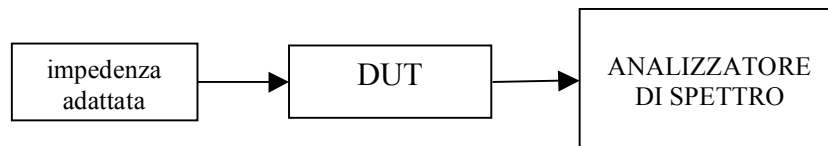


Fig.3 - Misura assoluta del rumore

Questo metodo è facilmente applicabile, in quanto è necessario disporre solo di un analizzatore di spettro. Purtroppo la misura è "assoluta", nel senso che il valore di  $F$  risulta direttamente dalla misura di  $n_o$ , perciò errori in questa misura si ripercuotono direttamente su  $F$ . Se il DUT non introduce molto rumore e l'analizzatore invece ne introduce molto, il valore di  $n_o$  può dipendere più dal rumore dell'analizzatore che da

quello del DUT, di conseguenza la misura che ne risulta non sarà affidabile. In definitiva questo metodo si può applicare solo in presenza di un buon analizzatore di spettro e se il DUT presenta alti valori di NF (10 dB o più). Anche in queste condizioni però si deve attendere un valore determinato per NF errato per eccesso.

## 7. Misura relativa (metodo del fattore Y)

Per evitare di dover dipendere da una misura unica bisogna poter fare un confronto tra due misure nelle stesse condizioni (analizzatore, DUT), cambiando solo la sorgente di rumore. Per fare ciò serve un componente ausiliario, una "sorgente di rumore", la quale fornisca un rumore bianco che aumenta in maniera prevedibile quando passa dallo stato di "spento" a quello di "acceso". La caratterizzazione delle sorgenti di rumore viene data dal cosiddetto *Excess Noise Ratio* (ENR), dato da:

$$ENR = \frac{T_H - T_0}{T_0}, \quad (13)$$

in cui  $T_0$  è la solita temperatura di riferimento (290 K), mentre  $T_H$  è un'altra temperatura corrispondente ad una sorgente equivalente posta ad una temperatura molto maggiore (H sta per *hot*), in modo da rendere evidente la differenza che consegue all'applicazione di tale rumore al DUT.

In pratica la misura si fa in due tempi, nei quali è come se si collegassero due diverse sorgenti  $N_i$  di cui in fig.2 ( $N_{eq}$  ovviamente non cambia perché dovuta a cause interne al DUT). Nei due tempi si rileva il rumore all'uscita e si determina un fattore Y, definito come:

$$Y = n_{oH} / n_{o0}, \quad (14)$$

in cui il pedice o, come in precedenza, fa riferimento all'uscita, il pedice 0 alle condizioni di bassa temperatura (sorgente spenta), H alla temperatura alta (sorgente accesa). Il banco di misura è rappresentato in fig.4.

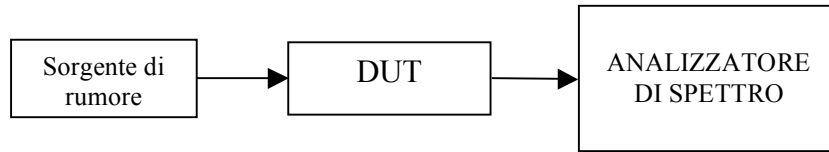


Fig.4 - Misura relativa del rumore (con sorgente nota)

È facile notare come, in questo caso, essendo presente un rapporto (unità lineari), il rumore introdotto dall'analizzatore non influenza più il risultato calcolato per F, che viene a dipendere da Y, come si può ricavare dai passaggi riportati sotto.

$$\begin{aligned}
 Y = \frac{n_{oH}}{n_{o0}} &= \frac{k(T_H + T_{eq})G}{k(T_0 + T_{eq})G} = \frac{T_H + T_{eq} + T_0 - T_0}{T_0 + T_{eq}} = \frac{(T_H - T_0) + (T_0 + T_{eq})}{T_0 + T_{eq}} = \frac{T_H - T_0}{T_0 + T_{eq}} \cdot \frac{T_0}{T_0} + 1 = \\
 &= \frac{T_H - T_0}{T_0} \cdot \frac{T_0}{T_0 + T_{eq}} + 1 = \frac{ENR}{F} + 1 \\
 F &= \frac{ENR}{Y - 1}
 \end{aligned} \quad (15)$$

Questo metodo, anche se molto migliore del precedente (viene usato dagli strumenti professionali che determinano Y e NF automaticamente a varie frequenze), non è esente da difficoltà. Una è legata alla temperatura: ENR è determinato sulla base di  $T_0$  pari a 290 K, ma se la temperatura ambiente fosse diversa si dovrebbero introdurre correzioni. Per fortuna per piccoli scostamenti di temperatura (qualche grado) l'errore su F è trascurabile.

Altro problema è legato ai disadattamenti di impedenza tra sorgente e DUT, in particolare quando la sorgente è "calda". Le conseguenze sono di difficile previsione, tuttavia si può supporre che, quanto più la sorgente emette (cioè è calda) tanto più, all'aumentare del disadattamento, il sistema diventa "rumoroso" (il disadattamento peggiora i segnali ma aumenta i rumori); di conseguenza l'ENR teorico è più piccolo di quello reale e F risulta errato per difetto. Per migliorare le condizioni di adattamento si potrebbe introdurre

un attenuatore, tuttavia questa soluzione rischia di abbassare troppo le letture sull'analizzatore di spettro, cosa in generale non positiva. In definitiva, se la sorgente è stata caratterizzata bene, la curva di ENR in funzione della frequenza fornita dal costruttore dovrebbe tener conto anche di eventuali disadattamenti di impedenza (la sorgente è provata connessa ad un carico), perciò anche questa causa di errore si può ritenere trascurabile, o, tutt'al più dare piccoli errori per difetto.

## 8. Alcune verifiche sperimentali

Per verificare quanto sopra sono stati applicati i due metodi per determinare la cifra di rumore di un amplificatore della HP (84470D) e di uno costruito in INGV.

Nelle condizioni di lavoro, per entrambi gli oggetti connessi all'analizzatore di spettro usato (Agilent 4396B), il fondo di rumore con i DUT spenti è risultato di -152 dBm/Hz. Notare la notevole differenza con il livello minimo teorico (-174 dBm/Hz), dovuta all'analizzatore stesso. Se il livello del rumore misurato in condizioni operative supera il fondo di almeno 10 dB (quindi almeno -142 dBm/Hz) si può ammettere che la misura sia sufficientemente affidabile.

La sorgente di rumore usata ha un ENR di circa 15 dB (con piccole variazioni con la frequenza).

Il dispositivo HP è un amplificatore a larga banda (0.1 - 1300 MHz), provato a 150 MHz, dove presenta un guadagno di 26.4 dB (dichiarati 26 minimi). Il costruttore garantisce una cifra di rumore inferiore a 8.5 dB (che verosimilmente sono raggiunti nella parte alta della banda passante). Il metodo del guadagno ha portato ad un livello di rumore in uscita di -142 dBm/Hz, che, dalla (12) convertita per unità logaritmiche, fornisce  $NF = -142 + 174 - 26 = 6$  dB. Il metodo del fattore Y ha portato un  $n_{0H}$  di -132 dBm/Hz ( $n_{00}$  è uguale a quello di prima: -142) e la NF risulta di 3.9 dB. Entrambi i metodi portano quindi a valori inferiori a quanto garantito dal costruttore.

L'amplificatore INGV è un circuito costruito per un'applicazione specifica (ricevitore per glacio-radar). Esso presenta un guadagno di 33 dB per un ingresso a 150 MHz e un'uscita a 60 (vi è una conversione interna con oscillatore locale a 90 MHz). La cifra di rumore stimata era di circa 8 dB, ma la stima era stata conservativa, in quanto era stata sovrastimata la cifra di rumore (non nota) di un limitatore posto all'ingresso del dispositivo. L'applicazione del metodo diretto ha dato un rumore in uscita di -134 dBm/Hz, perciò  $NF = -134 + 174 - 33 = 7$  dB. Il metodo del fattore Y ha portato a misurare un  $n_{0H}$  di -125 dBm/Hz, da cui si ricava un NF di 4.9 dB.

È interessante notare come il metodo del fattore Y abbia fornito in entrambi i casi risultati di un paio di decibel inferiori all'altro, come previsto dalle precedenti considerazioni teoriche. D'altro canto, data la non elevata affidabilità del metodo diretto, si può ritenere che quanto trovato col metodo indiretto sia più vicino al valore vero.

## 9. Linearità nei ricevitori

Un sistema è lineare quando l'uscita è in ogni istante proporzionale all'ingresso o, più precisamente, quando ad una combinazione lineare di segnali all'ingresso corrisponde una combinazione lineare di segnali all'uscita; il segnale può uscire alterato di un fattore costante per tutte le ampiezze dell'ingresso e ritardato nel tempo. Quando il fattore di proporzionalità è anche costante nel tempo si parla di sistemi permanenti. Se si rappresenta l'ampiezza di un segnale all'uscita (es. di una sinusoide) in funzione di quella presente all'ingresso, la caratteristica ingresso - uscita che si ottiene dovrebbe essere una retta. È bene ricordare che il fattore di proporzionalità tra ingresso e uscita può essere differente per varie frequenze del segnale di ingresso; in altre parole, il sistema non tratta le varie frequenze allo stesso modo, portando a distorsione dei segnali composti da più frequenze; questo tipo di distorsione è chiamata "lineare" e non è di solito molto problematica, se non altro perché è più facile una sua trattazione matematica con le note trasformate di Fourier.

Ben peggiore è il caso in cui l'uscita non è più proporzionale all'ingresso ad una stessa frequenza; purtroppo qualunque sistema reale avrà la caratteristica ingresso - uscita lineare solo per un certo intervallo di ampiezze. Per valori molto piccoli la linearità è di solito garantita e, semmai, è il livello di rumore che può rendere problematico il funzionamento del ricevitore. Per valori molto grandi l'uscita tende a non salire tanto quanto l'ingresso, raggiungendo la "saturazione". Non si può escludere a priori che altri fenomeni non lineari si possano manifestare prima della saturazione, ad esempio la generazione di segnali spuri, o dovuti alla

intermodulazione tra portanti presenti all'ingresso. Per il momento ci occupiamo solo degli effetti dovuti ai segnali molto forti, che portano alla cosiddetta "distorsione armonica".

Piccoli effetti di non linearità sono sempre presenti all'uscita di un qualunque sistema, con conseguente generazione di sinusoidi a frequenza armonica rispetto a quella presente all'ingresso. L'avvicinarsi della saturazione porta ad una limitazione dell'ampiezza, detta "compressione", ed un cambiamento di forma d'onda, che si allontana dalla forma sinusoidale; la cosa corrisponde, nel dominio della frequenza, all'incremento dell'ampiezza delle armoniche. Visto in un'altra maniera, è come se l'energia fosse trasferita dalla fondamentale alle armoniche.

Le conseguenze pratiche del fenomeno della distorsione armonica di solito non sono molto rilevanti, se si esclude la perdita di potenza rispetto a quella teoricamente disponibile se non vi fosse stata saturazione. Il fatto che il segnale alla frequenza fondamentale non cresca oltre un certo limite in certi casi può anche essere vantaggioso, ad esempio per la protezione di stadi successivi. Le frequenze armoniche di solito si vengono a trovare fuori della banda utile nella ricezione, cosicché la loro presenza non porta conseguenze negative di rilievo.

Ad ogni modo, per caratterizzare un sistema nei confronti della saturazione un parametro molto usato è il cosiddetto P1, punto di compressione a 1 dB, definito come il livello (di solito in dBm) di uscita (o all'ingresso, meno usato) che si trova 1 dB sotto al livello teorico che si sarebbe dovuto avere senza compressione. Tale parametro rappresenta un livello assoluto, molto vicino al massimo che il sistema può presentare in uscita, cioè quello di saturazione; sicuramente è un valore che è prudente non superare per evitare che i fenomeni non lineari generati assumano valori rilevanti.

Se le armoniche rimangono spesso fuori della banda utile, non altrettanto può dirsi dei prodotti di intermodulazione che possono comparire quando all'ingresso sono presenti due segnali a frequenza vicina e interna alla banda utile. Gli stessi fenomeni non lineari che provocano la comparsa delle armoniche possono dare luogo a frequenze che sono la combinazione lineare di quelle di ingresso, alcune delle quali possono cadere all'interno della banda utile. Al riguardo è utile scrivere qualche formula per chiarire a cosa si va incontro.

Se  $x(t)$  è il segnale di ingresso, l'uscita  $y(t)$ , in presenza di fenomeni non lineari, può essere espressa come serie di potenze dell'ingresso:

$$y = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \dots, \quad (16)$$

in cui solo il primo termine dovrebbe essere presente in caso di sistema ideale. Se i segnali in ingresso sono due sinusoidi frequenza  $f_1$  e  $f_2$ , il termine di secondo grado porta alla generazione delle frequenze  $0$ ,  $f_1^2$ ,  $f_2^2$ ,  $(f_1 - f_2)$  e  $(f_1 + f_2)$ , tutte di solito esterne alla banda utile. Al contrario le frequenze generate dal termine di terzo grado sono più critiche, come è facile verificare, ponendo ad esempio l'ingresso nella forma:

$$x(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (17)$$

Si deve calcolare il cubo del binomio e applicare le formule trigonometriche opportune per ottenere funzioni coseno alla prima potenza, con argomento dato da somme o differenze degli argomenti di partenza. I termini che si ottengono hanno frequenze  $3f_1$ ,  $3f_2$ ,  $2f_1+f_2$ ,  $2f_2+f_1$ ,  $2f_1-f_2$ ,  $2f_2-f_1$ . I primi quattro termini cadono di solito fuori banda, ma gli ultimi due potrebbero avere frequenza paragonabile a quelle di partenza e quindi generare interferenza fastidiosa. Per questo motivo è il contributo del terz'ordine che viene maggiormente tenuto sotto controllo nel valutare le prestazioni di un sistema di comunicazione.

## 10. Punto di intercetta del terz'ordine

Se nella (17) si pone per semplicità  $a_1 = a_2 = a$ ,  $\varphi_1 = \varphi$  e  $\varphi_2 = 0$ , dopo aver svolto i calcoli si trova per le componenti del terz'ordine miste, quelle possibile fonte di disturbo:

$$y_3' = k_3 \frac{3}{4} a^3 \cos[(2\omega_1 - \omega_2)t + \varphi] \quad \text{e} \quad y_3'' = k_3 \frac{3}{4} a^3 \cos[(2\omega_2 - \omega_1)t - \varphi]. \quad (18)$$

Ricordando che  $a$  è l'ampiezza delle due portanti in ingresso, si vede che l'ampiezza delle uscite incriminate aumenta col cubo di  $a$ . Per piccoli valori di  $a$ , essa è trascurabile, ma essa cresce molto più rapidamente arrivando ad un punto in cui uguaglia quella della fondamentale; il fenomeno era stato già previsto, quando si è detto che l'energia sulle armoniche si incrementa a "spese" della fondamentale. Lo schema sottostante (fig.5) illustra il comportamento in una scala logaritmica, che è quella normalmente usata nella tecnica; in essa è segnata qualitativamente anche la posizione di P1.

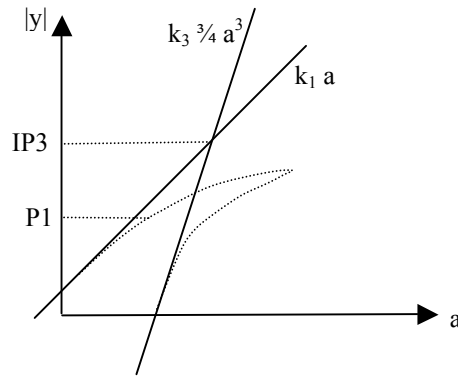


Fig.5 - Definizione del punto di intercetta del terz'ordine

Il punto di intersezione tra le rette viene detto IP3, punto di intercetta del terz'ordine (potendone esistere altri, ad esempio del second'ordine). Ovviamente le rette indicate sono ideali, dato che nella pratica prima o poi devono tendere a diventare orizzontali (come approssimativamente indicato con i tratteggi); anzi, la zona di saturazione inizia ben prima del livello corrispondente all'incrocio tra le rette, cosicché il livello IP3 di solito è ben lungi dall'essere raggiunto; ciò nonostante il livello assoluto IP3 (di solito indicato in dBm) viene spesso usato per caratterizzare la capacità di un sistema (amplificatore o altro componente attivo) di raggiungere elevati livelli di uscita senza introdurre componenti spurie. È interessante notare che il valore di P1 si trova sempre al di sotto di IP3 di una quantità abbastanza costante, circa 13 dB (tra 10 e 15).

Imponendo l'uguaglianza tra le ampiezze delle componenti fondamentale e di intermodulazione del terz'ordine, si trova il valore di  $a$  che soddisfa il requisito ( $4k_1a = 3k_3a^3$ ); quindi è possibile stabilire il legame tra IP3 e le costanti  $k$  (in unità lineari di potenza):

$$IP3 = k_1^2 a^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{k_1^3}{k_3} \quad (19)$$

È molto importante sottolineare che il parametro IP3 così calcolato è usato come indicatore pratico, ma è tutt'altro che un parametro esatto. Si ricordi infatti come siano state fatte le seguenti assunzioni:

- è stato ipotizzato che in ingresso siano presenti solo due toni puri,
- sono stati trascurati tutti i contributi in uscita diversi dal 3° ordine,
- tra quelli del 3° ordine sono stati considerati solo quelli che (presumibilmente) cadono nella banda utile,
- sono stati confrontati solo due segnali (un tono puro ed uno di intermodulazione), anche se nella realtà ve ne sono quattro.

## 11. Calcolo di IP3 di sistemi in cascata

In letteratura è possibile trovare una formula per determinare con un semplice calcolo il valore IP3 complessivo di una cascata di sistemi dei quali si conoscono le singole IP3 ed i guadagni, in maniera analoga al calcolo della cifra di rumore per sistemi in cascata. Se gli stadi in cascata hanno guadagni  $G_1, G_2, \dots, G_N$  e i rispettivi parametri IP3 sono  $IP3_1, IP3_2, \dots, IP3_N$ , allora il valore cercato è dato dalla formula seguente:

$$IP3_{tot} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{IP3_i \cdot \prod_{j=i+1}^{N+1} G_j}, \quad (20)$$

in cui il valore  $G_{N+1}$  va inteso sempre pari a uno. In pratica l'effetto è opposto rispetto a quello del rumore: in quel caso infatti, supponendo una catena di amplificatori, quello che dà il maggiore contributo è il primo, dato che poi le cifre di rumore dei successivi sono divise per i guadagni della catena a monte. In questo caso il contributo maggiore lo dà l'ultimo, perché gli IP3 degli stadi precedenti vengono moltiplicati per tutti i guadagni a valle, ma dato che nella somma bisogna prendere i reciproci, essi in pratica diventano trascurabili, tranne l'ultimo, moltiplicato per uno. Ciò è comprensibile, se si pensa che l'ultimo stadio è quello che si trova ad essere sollecitato dal segnale più forte, già portato a livelli elevati dagli stadi precedenti, perciò è l'ultimo stadio quello che in genere deve avere le migliori caratteristiche di linearità. Questo discorso è chiaramente generico, fatto solo per spiegare il principio; se in una catena gli stadi hanno guadagni molto

variabili (o vi sono attenuazioni), l'andamento del rumore e dei prodotti del terzo ordine va tenuto sotto controllo lungo tutta la catena.

Trovare in letteratura la (20) non è frequente, per lo meno nei testi introduttivi alla teoria delle comunicazioni; purtroppo è ancor meno facile trovare la sua dimostrazione, che sarebbe utile per percepire i limiti di applicazione della stessa. Per arrivare alla (20), almeno per due stadi in cascata, si ipotizzi la situazione illustrata nello schema della fig.6.

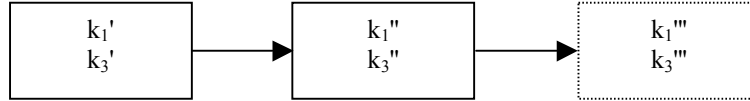


Fig.6 - Schema per il calcolo di IP3 in cascata

Si noti come i pedici si riferiscono al parametro descrittore, del primo o terzo ordine, mentre gli apici fanno riferimento all'ordine nella catena. Il terzo stadio è stato messo solo perché la (20) lo prevede per inserire il valore  $k_1'''=1$ .

Ebbene, se si vanno a calcolare le ampiezze dei toni del primo e terzo ordine dopo il primo stadio, ponendo sempre pari ad  $a$  quella del segnale entrante, esse varranno, come già trovato in precedenza:  $(k_1' \cdot a)$  e  $(\frac{3}{4} \cdot k_3' \cdot a^3)$ . In realtà all'uscita del primo stadio non sono presenti solo i due toni suddetti, dato che, come è stato sottolineato in precedenza, sono presenti molti altri segnali; se anche ci si ferma a considerare solo quelli del 2° e 3° ordine, le combinazioni possibili di segnali all'uscita del secondo stadio diventano decine, e tra questi alcuni potrebbero avere frequenza che cade all'interno della banda utile. Si decida di limitare l'esame ad un solo livello, vale a dire che si suppone che all'uscita del secondo stadio i soli contributi significativi siano:

- la fondamentale, che rimane alla stessa frequenza, di ampiezza  $a \cdot k_1' \cdot k_1''$ ,
- il prodotto del terzo ordine generato dal primo stadio, che rimane alla stessa frequenza passando per il secondo stadio, di ampiezza:  $\frac{3}{4} \cdot k_3' \cdot a^3 \cdot k_1''$ ,
- il prodotto del terzo ordine generato dal secondo stadio provocato dalla fondamentale all'uscita del primo, la cui ampiezza è:  $\frac{3}{4} \cdot k_3'' \cdot (k_1' \cdot a)^3$ .

In queste ipotesi, e supponendo che le ampiezze dei due contributi del terzo ordine all'uscita del secondo stadio si possano sommare, per calcolare il valore di  $a$  corrispondente alla uguaglianza dei livelli del 1° e 3° ordine si deve risolvere la semplice equazione:

$$4a \cdot k_1' k_1'' = 3a^3 \cdot (k_3' k_1'' + k_3'' k_1'^3) . \quad (21)$$

Una volta trovato il valore di  $a$  è facile ricavare l'IP3 totale usando la (19), ottenendo:

$$IP3_{tot} = (k_1' k_1'')^2 \cdot a^2 = \frac{\frac{4}{3} (k_1' k_1'')^2}{\frac{k_3'}{k_1'} + \frac{k_3'' k_1'^2}{k_1''}} . \quad (22)$$

Quest'ultima espressione è equivalente alla (20), infatti, partendo dalla (20) e sostituendo i valori dei vari  $k_i$ , oltre che gli IP3 ricavati per i due stadi sempre in funzione dei vari  $k_i$ , si arriva alla (22).

Il modo con cui è stata ricavata la (22) è istruttivo perché mette in rilievo il limitato campo di applicazione della (20); si ricorda infatti che si sono dovute accogliere le due ipotesi semplificative (da aggiungere alle condizioni già introdotte):

- non sono presenti altri contributi del 3° ordine oltre i due considerati,
- è possibile sommare le ampiezze dei contributi del 3° ordine.

## 12. Conclusioni

Il presente lavoro è stato scritto come supporto teorico per la pratica di laboratorio, nel momento in cui si debba progettare e collaudare un sistema ricevente del tipo di quelli usati tipicamente dal Laboratorio di Geofisica Ambientale dell'INGV.

Le caratteristiche di rumorosità di questi sistemi vanno considerate in sede di progetto, tuttavia in passato non era mai stato possibile misurare direttamente le cifre di rumore di questi apparati, anche a causa del costo eccessivo di uno strumento dedicato allo scopo. L'acquisto di una sorgente di rumore e

l'applicazione dei metodi sopra descritti consente di effettuare misure della cifra di rumore; il costo per l'acquisto di una tale sorgente è stato estremamente conveniente, e le misure che sono così risultate possibili sono sufficientemente accurate per gli scopi del laboratorio.

Circa le prestazioni in dinamica, la conoscenza delle relazioni sull'IP3 aiuta grandemente in sede di progetto, anche se, viste le approssimazioni introdotte, sono insostituibili il collaudo e la misura diretta del punto di compressione e delle eventuali frequenze spurie generate.

## **Bibliografia**

Per una trattazione generale sull'argomento è possibile consultare un testo di tecnica delle Radio Frequenze, come ad esempio uno dei seguenti:

- Rohde U., Bucher T.T.N., Communication receiver, McGraw-Hill 1988/1994
- Razavi B., RF Microelectronics, Prentice Hall 1998

Questi testi però contengono solo informazioni teoriche e non arrivano alla dimostrazione sull'IP3 di cui al par.11.

Per ottenere informazioni di carattere più pratico ed operativo si possono consultare alcuni siti internet. Circa i metodi di uso delle sorgenti di rumore:

- [www.maxim-ic.com/appnotes.cfm/appnote\\_number/2875](http://www.maxim-ic.com/appnotes.cfm/appnote_number/2875)
- [www.die.uniroma1.it/personale/palma/elettronicaIPalma/sito\\_stage\\_elettronica/Garofalo\\_02.PDF](http://www.die.uniroma1.it/personale/palma/elettronicaIPalma/sito_stage_elettronica/Garofalo_02.PDF)

Per quanto riguarda le non linearità, e la formula delle reti in cascata, si possono consultare:

- [www.maxim-ic.com/appnotes.cfm/appnote\\_number/749/](http://www.maxim-ic.com/appnotes.cfm/appnote_number/749/)
- [www.rfcafe.com/references/electrical/ip3.htm](http://www.rfcafe.com/references/electrical/ip3.htm)
- [www.mpdigest.com/Articles/2003/Oct2003/Analog/Default.htm](http://www.mpdigest.com/Articles/2003/Oct2003/Analog/Default.htm)